**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

**Случайные события и их вероятности**

**Учебные вопросы:**

|  |
| --- |
| ***1. «Основные понятия. Классическое определение вероятности»*** |
|  |
| ***2. «Сумма и произведение событий»*** |
|  |
| ***3. «Теоремы сложения, умножения вероятностей»*** |

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2: Учеб. пособие для вузов
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник для студ. Вузов

***Миром правит случай.***

***Но во всякой случайности***

***есть доля закономерности***

***ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*** **–** **это раздел математики изучающий закономерности случайных событий.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Случайным***называется **событие**, наступление которого нельзя заранее предугадать.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Испытанием***называется совокупность условий, при котором может произойти данное случайное событие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Случайное событие*** – это результат (исход) испытания, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет.

**События обозначают** буквами латинского алфавита **A, B, C** …

**Исторические сведения**

Известно, что понятие вероятности определялось через число шансов (возможностей, исходов), которое можно вычислить по правилам комбинаторики.

Я. Бернулли сформулировал закон больших чисел и определил связь между вероятностью события и частотой (ТВ и статистикой), дал статистический подход к определению вероятности события.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Вероятность события***– это число, характеризующее степень возможности появления событий при многократном повторении событий.

***Вероятность обозначают:***

***Р или Р (А).***

Где ***А*** – событие

**КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ**

Пусть известны все возможные исходы испытания и нет оснований считать, что одно случайное событие появлялось бы чаще других, т.е. события равновозможные.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Вероятностью Р(А) события А*** называется отношение числа благоприятствующих исходов ***m*** к общему числу равновозможных несовместных исходов ***n:*** .

**Исторические сведения.**

Классическое определение вероятности сформулировал П. Лаплас в 1795 г.

***Свойства вероятности:***

1. Вероятность случайного события А находится между 0 и 1
2. Вероятность достоверного события равна 1

.

1. Вероятность невозможного события равна 0.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

**Достоверное событие–**это такое событие, которое в результате опыта непременно должно произойти

**Невозможное событие** **–** это такое событие, которое в данном опыте не может произойти.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

Несколько событий в данном опыте образуют ***полную группу******событий***, если в результате опыта должно появиться хотя бы одно из них.

**Примеры событий, образующих полную группу:**

а) выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

б) попадание и промах при выстреле;

в) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости.

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ**

**Исторические сведения**

* Начало комбинаторики как науки положено Г. Лейбницем (1646 – 1716 гг.) «Рассуждения о комбинаторном искусстве».
* Д. Валлис «Рассуждения о сочетаниях, перестановках».
* В. Де Бесси «Резюме о соединениях».
* Я. Бернулли «Учение о перестановках и сочетаниях»

Теория вероятностей, также, как и теория игр изучала азартные игры, множество исходов, шансов участников в ходе игр.

Слово «***азарт***» (от арабского) – трудный.

Арабы называли азартной игрой комбинацию очков, которая появляется единственным образом при бросании нескольких игральных костей.

Например, трудным («азар») при бросании двух костей считалось появление в сумме 2-х или 12-и очков. Для подсчета возможного числа комбинаций использовали правила комбинаторики.

***Комбинаторика*** **–** раздел математики, в котором изучаются простейшие комбинации элементов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Перестановки* –** комбинации элементов, состоящие из всех *п* элементов, отличающиеся порядком следования.

***Число всех перестановок*** определяется по формуле:

***Рn = n!***

**Пример.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

***Решение:***

Искомое число трехзначных чисел

*Рn*= 3!= 1 • 2 • 3 = 6.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Размещения* –** комбинации элементов, составленные из *п* различных элементов по *т*штук, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их следования.

***Число всех возможных размещений*** определяется по формуле:

.

**Пример**

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

*Решение:*

Искомое число сигналов

.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Сочетания* –** соединения, составленные из *п* различных элементов по *т*элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

***Число сочетаний*** определяется по формуле:

.

**Пример**

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

***Решение:***Искомое число способов .

**«АЛГЕБРА СОБЫТИЙ»**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Суммой двух случайных событий А и В*** называют событие **С**, состоящее в появлении события **А**, или события **В**, или обоих вместе.

**Пример 1.** А и В несовместны

**А В**

**Пример 2.** А и В совместны

**А АВ В**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Суммой нескольких случайных событий*** называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

**Пример.** Испытание – подбрасывание игральной кости.

**События:**

А1 – выпадение грани с **2** очками,

А2 – выпадение грани с **4** очками,

А3 – выпадение грани с **6** очками,

тогда сумма событий:

А = А1 + А2+ А3

- появление грани с четным числом очков.

События А1, А2, А3 – несовместны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Произведением двух случайных событий А и В*** называют событие **С**, состоящее в совместном появлении события **А** и события **В**.

**Пример**

***Испытание*** – производят два выстрела по мишени.

Событие **В1** – попадание при 1-м выстреле,

событие **В2** – попадание при 2-м выстреле,

тогда произведение событий **В =** **В1· В2 –** попадание при обоих выстрелах.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением нескольких случайных событий*** называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Противоположными*** называют два несовместных события, образующих полную группу. ***Обозначение:* А –** событие**,   
Ā –** событие противоположное**.**

**Пример.** Опыт – подбрасывание монеты.   
**А –** выпадение герба, **Ā** – выпадение цифры.

**Следствие 2.** Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

Р(**А) + Р(Ā**) **= 1**

При определении вероятностей сложные события представляют, как комбинацию простых с использованием операций сложения и умножения событий.

**Пример.** Опыт – производят три выстрела по мишени.

***События:***

**А1** – попадание при 1-м выстреле,

**Ā1** – промах при 1-м выстреле,

**А 2** – попадание при 2-м выстреле,

**Ā 2** – промах при 2-м выстреле,

**А 3** – попадание при 3-м выстреле,

**Ā 3** – промах при 3-м выстреле,

Рассмотрим ***сложное событие* В** –   
в результате трех выстрелов будет ровно ***одно попадание в мишень***.

В = **А1Ā 2Ā 3+ Ā 1А2Ā 3+ Ā 1Ā 2А3**

***Событие* С** – в мишень попали не менее двух раз (то есть два или три).

**С =** **А1А2Ā 3+ Ā 1А2А3+ А1Ā 2А3+ + А1А2Ā 3 + А1А2А3**

**ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**Исторические сведения**

Т. Байес (1702 – 1716 гг.) дал определения совместных (несовместных), зависимым (независимых), противоположных событий, дал понятие условной вероятности, сформулировал теоремы сложения и умножения.

**Теорема. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:* Р(А + В) = Р(А) + Р(В)**

**Замечание.** Теорема суммы применима к любому конечному числу несовместных событий **А1,А2, …,Ак**:

Р(**А1+А2+…+Ак**) **=**Р(**А1)+Р(А2)+…+Р(Ак**)

**Следствие 1.** Если события **А1,А2, …,Ак** образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1.

Р(**А1+ А2+…+ Ак**) **= 1**

**Пример.** Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания при одном выстреле в 1 **–** ю зону равна ***0.15***, вероятность попадания во 2-ю зону равна ***0.23***, в 3-ю зону ***0.17***. Найти вероятность промаха.

События **А1** – попадание в 1-ю зону, **А2** – попадание в 2-ю зону,

**А3** – попадание в 3-ю зону,

**А1+ А2+ А3=** **А** – попадание в мишень

**А1, А2, А3** – несовместные события.

**Р(А) =** Р(**А1) +Р(А2) + Р(А3**)

**Р(А)*= 0.15 + 0.23 + 0.17 = 0.55***

**Ā –** событие противоположное А

**Р(Ā**) **= 1** **–**Р(**А) *= 1*–*0.55 = 0.45***

**Теорема. *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:***

**Р(А + В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ)**

***Событие А называется независимым от события В,*** если вероятность его появления не зависит от того, произошло или нет событие В.

**Пример.** Подбрасывание монеты.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**

***Событие А называется зависимым от события В,*** если вероятность его появления меняется в зависимости от того, произошло или нет событие В.

**Пример**

В урне 3 белых и 4 черных шара. Вероятность извлечь белый шар равна 3/7. При повторном извлечении шара вероятность достать белый шар 2/6 =1/3.

Вероятность события **А** зависимого от **В**, вычисленная после появления события В обозначается **Р(А/В)** или **РВ(А)**

**Теорема**

***Вероятность произведения нескольких независимых событий*** **А1,А2, …,Ак *равна**произведению вероятностей этих событий***

Р(**А1 А2 … Ак**) **=**Р(**А1) Р(А2)** **… Р(Ак**)

**Теорема. *Вероятность произведения двух зависимых событий*** **А*и*В *равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго события, вычисленную при условии, что первое событие произошло:***

Р(**А В**) **=**Р(**А) Р(А/В)**

**Следствие. *Вероятность произведения зависимых событий*** **А1,А2, …,Ак *равна**произведению вероятностей:***

Р(**А1 А2 … Ак**) **=**

**=**Р(**А1)Р(А2/А1)Р(А3/А1 А2)…Р(Ак/А1 А2…Ак-1**)

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ**

Если для события А произведена серия из ***п***опытов (испытаний), то ***частотой (относительной частотой) события А*** в данной серии опытов называется ***отношение числа опытов m, в которых появилось событие А, к общему числу произведенных опытов п***.



Частоту события называют ***статистической вероятностью***.

**Исторические сведения**

Французский ученый 18 века Бюффон бросил монету 4040 раз, в результате чего герб выпал 2048 раз.

Частота выпадения герба:

 = 0,5069  0,5.

**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ**

Вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).

Пусть *l* составляет часть отрезка *L*.

На отрезке *L* наудачу поставлена точка:



Аналогично определяется вероятность попадания точки в плоскую фигуру *g*, составляющую часть плоскости фигуры *G*,



и вероятность попадания точки в пространственную фигуру *v*, которая составляет часть фигуры *V*

****

**ПРИМЕР**

В 1777 г. Ж.Б. Бюффон (1707 – 1788 гг.) в работе «Опыт правительственной арифметики» исследовал игру «**франк-каро**» (т.е. прямо в клетку).

***Суть игры:*** на пол, выложенный правильными шестиугольными плитками, бросают круглую монету.

**Игрок № 1** держит пари за то, что монета ляжет целиком внутри шестигранника (событие ***А1***).

**Игрок № 2** ставит на то, что монета пересечет какую-нибудь линию соединения шестигранников (событие ***А2***).

Для решения вопроса о выигрыше внутри основного шестигранника ***ABCDEF*** рисуют меньший ***A1B1C1D1E1F1***так, чтобы расстояние между параллельными сторонами было равно полудиаметру монеты.

**Игрок № 1** выигрывает, если центр монеты внутри шестигранника ***A1B1C1D1E1F1.***

**Игрок № 2** выигрывает, если центр монеты попадает между контурами обоих шестигранников.

Вероятность выигрыша **игрока № 1** равна отношению площадей внутреннего ***S1*** и внешнего ***S*** шестигранников:

***Р(А1) = S1/ S***